

## Opgave 1

Laat gegeven zijn:

**CONST**

$n \in \text{INTEGER} ; \{n > 0\}$

$a \in \text{ARRAY} [0 \dots n) \text{ OF } [0 \dots n);$

De functie  $g$  op de natuurlijke getallen wordt gedefinieerd door

$$g(0) = 0$$

$$g(t+1) = a[g(t)] \text{ voor } t \geq 0$$

Voor deze functie  $g$  bestaat er een positief geheel getal  $M$  waarvoor geldt  $g(M) = g(2 \cdot M)$  (dit hoef je niet te bewijzen).

Gegeven is nu de rest van de specificatie:

**VAR**

$k : \text{INTEGER} ;$

$\{P : K = (\text{MIN } i : 1 \leq i \wedge g(i) = g(2 \cdot i) : i)\}$

$S;$

$\{Q : k = K\}$

- Herschrijf de preconditionie  $P$ . Merk op dat dit predikaat constant is en dus niet meegenomen hoeft te worden in de invariant.
- Geef een geannoteerd commando  $S$  dat aan de specificatie voldoet. [HINT: ik heb twee extra variabelen nodig gehad.]

## Opgave 2

Gegeven is een geheeltallige functie  $h$  van twee geheeltallige parameters. Deze functie is ascending in beide parameters.

Gegeven is nu de specificatie

**CONST**

$m, n \in \text{INTEGER} ; \{m \geq 0 \wedge n \geq 0\}$

**VAR**

$z : \text{INTEGER} ;$

$\{P : Z = (\text{MIN } i, j : 0 \leq i < m \wedge 0 \leq j < n \wedge h(i, j) > 0 : h(i, j))\}$

$T;$

$\{Q : z = Z\}$

⊗

- Definieer een functie  $F(x, y)$  die een geschikte generalisatie is van de kwantificatie uit de preconditionie.
- Leid voor  $F(x, y)$  geschikte recurrente betrekkingen af, inclusief het basisgeval.
- Geef een implementatie van het commando  $T$ . We vragen niet om het gehele stappenplan uit te schrijven, maar zijn tevreden met de laatste stap: een goede samenvatting, inclusief invariant en variante functie.

## Opgave 3

Bekijk de volgende (gedeeltelijke) implementatie van de recursieve procedure *Wortel*:

```
PROCEDURE Wortel ( $x, t : \text{INTEGER} ; \text{VAR } w : \text{INTEGER} ) =$   
  { all  $X, T \in \text{INTEGER} :$   
  : pre  $w \geq 0 \wedge t = T \geq 1 \wedge x = X \geq w^2$   
  , post  $w^2 \leq X < (w + T)^2$  }  
  [ IF  $x \geq (w + t)^2$  THEN  
    Wortel ( $x, 2 * t, w$ );  
    IF ... THEN  
      ... ;  
    END ;  
  END ;  
  ] Wortel;
```

Completeer deze implementatie en bewijs de correctheid van de oplossing. Formuleer daartoe expliciet de inductiehypothese.